Δευτέρα 4 Οκτωβρίου 2021.

Μαθηματικά

↓

Μαθηματικά Ματέλα

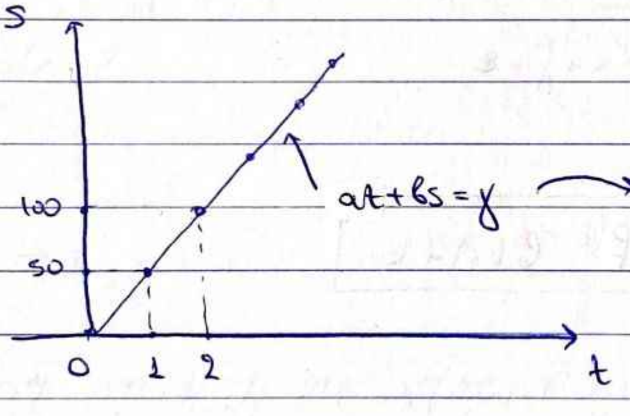
↓

Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση
(κίνηση με σταθ. ταχύτητα)

π.χ.

Ταχύτητα = u
διάστημα = s
χρόνος = t

t (σε ώρες)	0	1	2	3 ...
s (σε χλμ)	0	50	100	150 ...



$\boxed{s = u.t}$

Πρόκειται για είναι Ντετερμινιστικό, αιτιοκρατικό φαινόμενο.

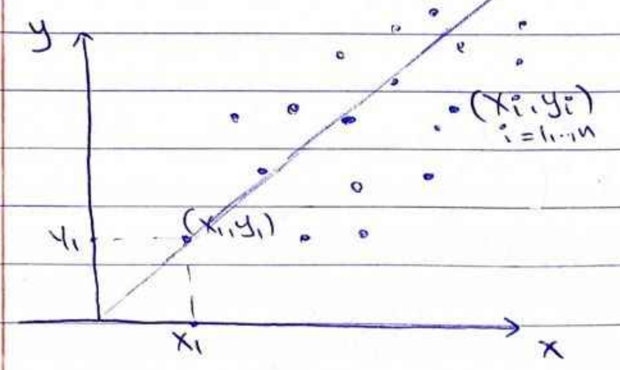
Παράδειγμα 2: Μελέτη και διερευνά σχέση ύψους βάρους.

ύψους → x

βάρους → y

Δεδομένα: Στις. x, y
Πληθυσμός: τ.δ. μεγέθους n

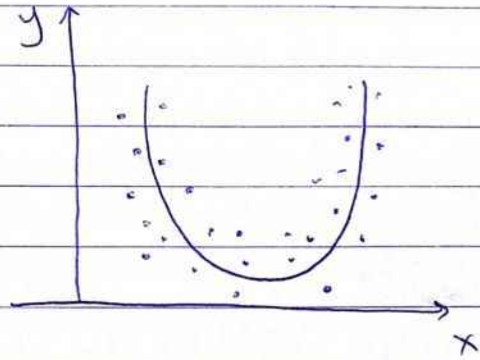
X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

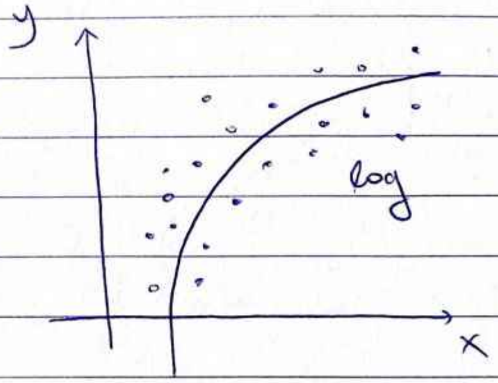


$Y = ax + b + \varepsilon$

↓

δείχνει το μπαλαντζάρισμα των σημείων επάνω στο μοντέλο. (σφάλμα)





$Y = ax^2 + bx + \gamma + \varepsilon$ $\qquad$ $Y = a\log x + b + \varepsilon$

Γενικά: $\boxed{Y = f(x) + \varepsilon}$

Εμείς θα ασχοληθούμε με γραμμικά μοντέλα, δηλ. της μορφής $y = ax + b + \varepsilon$.

Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση. (ΑΓΠ)

Έστω τ.μ. X και Y και έστω τα τ.δ.

X	x_1	x_2	....	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

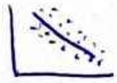
Πρώτο βήμα: Διάγραμμα Διασποράς.

↓

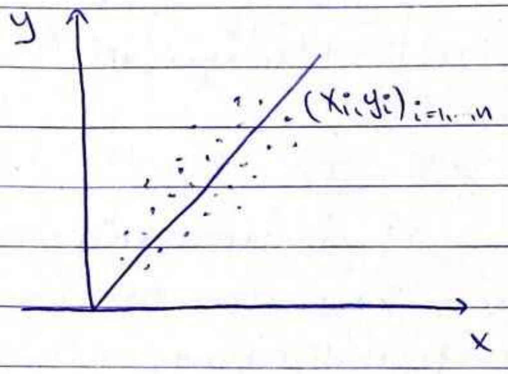
ⓐ Τη μορφή σχέσης μεταξύ x, y

③

(β) την κατεύθυνση της σχέσης.

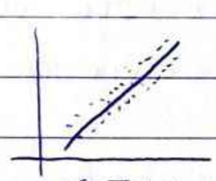


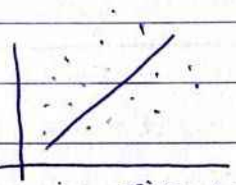
Παράσταση: (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, n$



(γ) την ένταση της γρ. σχέσης.

π.χ





ΑΓΠ: $Y = \underbrace{b_0 + b_1 . x} + \varepsilon \xleftrightarrow[\text{μορφή του ΑΓΠ}]{\text{ισοδύναμη}} Y_i = b_0 + b_1 . X_i + \varepsilon_i$ με $i = 1, 2, \dots, n$

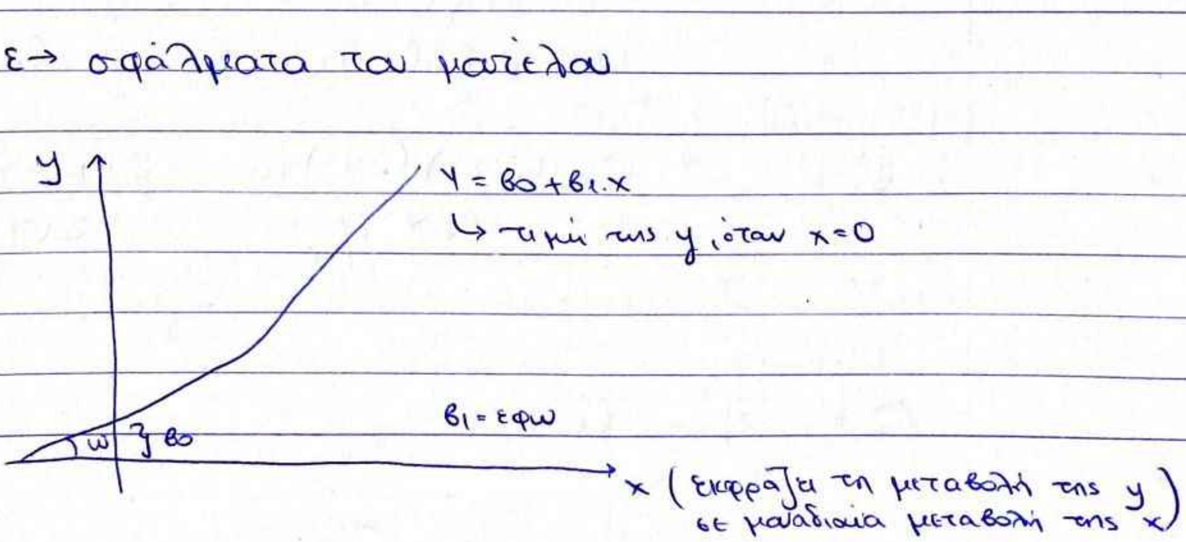
Ορολογία - Ερμηνεία

$Y \rightarrow$ εξαρτημένη μεταβλητή ή απόκριση

$X \rightarrow$ ανεξάρτητη μεταβλητή ή επεξηγηματική

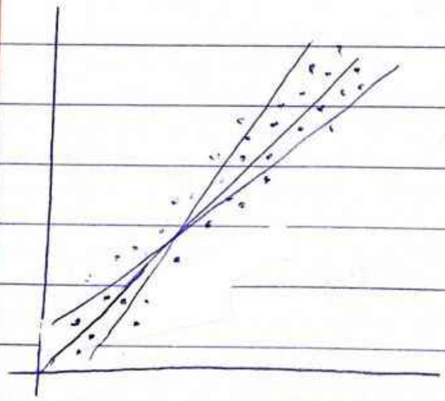
$b_0, b_1 \rightarrow$ οι παράμετροι του μοντέλου της ΑΓΠ.

$\varepsilon \rightarrow$ σφάλματα του μοντέλου



Εκτίμηση των παραμέτρων β_0, β_1

Εκτιμητές Ελαχίστων Τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.)
(Pearson ~ 1900)



Ποια είναι καλύτερη?
- Εκείνη που είναι πιο κοντά στα σημεία

Άρα, διαλέγω τα β_0 και β_1 έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται συνολικά τα ε_i, $i=1,\dots,n$

Άρα, να βρω τα β_0, β_1 που ελαχιστοποιούν το

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \overset{\alpha.\gamma.\pi.}{=} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i + \varepsilon_i)^2$$

Παίρνω μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0 \\[2em] \dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \Sigma y_i \\[2em] \beta_0 \Sigma x_i + \beta_1 . \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i \end{array}\right\} \text{Κανονικές Εξισώσεις}$$

$$\Big\Downarrow \text{λύση}$$

Οι Ε.Ε.Τ. των β_0 και β_1 είναι:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i).(\Sigma y_i)/n}{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta_0} = \bar{y} - \hat{\beta_1} . x.$$